“La monetina intuizionista”

Caso classico

Ogni calcolo di probabilità fa riferimento a una struttura algebrica di base o algebra degli eventi. Il calcolo classico fa riferimento all’algebra di Boole, di cui è un esempio paradigmatico l’insieme dei sottoinsiemi di un insieme, parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione tra insiemi. (In pratica, tutte le algebre di Boole sono strutturate come questa). L’algebra di Boole formalizza (nel senso che la equipaggia di una semantica) la nozione aristotelica di verità. Lo fa mediante l’applicazione v che associa ad ogni elemento (evento) dell’algebra di Boole $\mathscr{B}$ il valore di verità della corrispondente affermazione sull’evento: valore 0 (falso) o valore 1 (vero). In simboli, $v: \mathscr{B} \to \{0, 1\}$. (Qui si pone il problema di tradurre gli eventi in enunciati linguistici – problema che si dà per risolto, supponendo l’isomorfismo tra eventi ed enunciati). Secondo Accardi, gli assiomi cui deve soddisfare la funzione classica di verità si riducono a tre:

1. esiste almeno un’affermazione vera e una falsa;
2. se un’affermazione è vera la sua negazione è falsa;
3. la congiunzione di due affermazioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

Gli assiomi 2 e 3 porgono il teorema del binarismo forte:

Un’affermazione è vera (falsa) se e solo se la sua negazione è falsa (vera).

Si passa dal calcolo aristotelico della verità al calcolo classico delle probabilità, aggiungendo agli assiomi specifici dell’algebra di Boole gli assiomi della probabilità. Essi estendono l’applicazione v dall’insieme $\{0, 1\}$ all’intervallo chiuso $[0, 1]$. I valori della funzione verità allora si chiamano *gradi di plausibilità*. Gli assiomi della plausibilità classica sono da Accardi ridotti a due, da aggiungere ai precedenti;

4. la probabilità dell’evento totale Ω, o dell’intera algebra, è 1 (assioma di normalizzazione);
5. se due eventi sono incompatibili, la probabilità dell’evento che è la loro unione (o l’uno o l’altro) è la somma delle probabilità dei singoli eventi (assioma di additività finita).

Si verifica che questa estensione della funzione verità alla plausibilità non introduce incoerenze, cioè è una buona generalizzazione.

Caso intuizionista

Anche il calcolo intuizionista delle probabilità si basa su un’algebra, che costituisce la semantica della logica intuizionista: l’algebra di Heyting, la quale differisce dall’algebra di Boole per due aspetti.

A) L’algebra di Heyting è necessariamente infinita, mentre l’algebra di Boole può essere finita (teorema di Gödel del 1932 per la logica intuizionista).

B) La plausibilità della negazione di un’affermazione falsa (valore di plausibilità 0) è vera (valore di plausibilità 1), mentre la plausibilità della negazione di un’affermazione non falsa (valore di plausibilità $\neq 0$) è 0 (falso).

Il passaggio al calcolo delle probabilità si realizza mediante

C) assioma di normalizzazione,

mentre non si assume l’assioma di additività finita (né infinita).

Di conseguenza, il calcolo delle probabilità intuizionista non è *cumulativo*. Accardi propone il termine *sostitutivo*. In effetti, il calcolo intuizionista tratta probabilità singolari, il cui sapere non si deposita nei classici invarianti statistici: frequenze, medie e varianze, ottenuti per somma. Si tratta di probabilità concernenti eventi singolari, come gli eventi delle fisica quantistica, o le coincidenze uniche e irripetibili della vita psichica. (Non a caso un grande fisico quantistico, Wolfgang Pauli, si affaticò invano a formalizzare queste ultime, corrispondendo con Jung).

Sia come sia, il calcolo intuizionista è più vicino alla logica – in questo caso intuizionista – del calcolo classico – in quel caso aristotelica o booleana. C'è però un punto critico: la definizione di negazione, che sembra controintuitiva. Dimostro su un esempio che l'assioma B) è freudiano, anzi cartesiano.

In effetti, la premessa del discorso intuizionista, in generale, e del calcolo intuizionista della probabilità, in particolare, è cartesiana. Attraverso il dubbio Cartesio riduce tutto il plausibile al falso, lasciando che il falso rimanga tale. Tale operazione produce del vero, cioè certifica l'esistenza del soggetto della scienza che compie l'operazione di riduzione al falso. Dal non sapere si è prodotto un sapere (teorema di Cartesio).

Vediamo come questo discorso si realizza in una struttura topologica. (Per un ripasso di topologia vedi la *Prima Lezione* del Seminario di Asciano alla pagina *sapere dello spazio*).

La topologia di uno spazio topologico è una famiglia di suoi sottoinsiemi, detti *aperti*, che godono di due proprietà:

U) l'unione di aperti è aperta;

I) l'intersezione di due aperti è aperta.

Lo spazio topologico e l'insieme vuoto ∅ sono aperti.

La famiglia di aperti diventa algebra di Heyting, definendo negazione e implicazione così:

n) $\sim a$ = *interiore del complemento di a*;

i) $a \rightarrow b$ = ((*interiore del complemento di a*) ∪ *b*) (definizione filoniana di implicazione),

dove con *interiore* di un insieme si intende il più grande aperto contenuto in esso.

Da queste definizioni segue che la negazione di *a* si riduce alla particolare implicazione: $a \rightarrow \varnothing$. Tradotto in questo linguaggio topologico, ogni enunciato è logicamente valido se e solo se coincide con tutto lo spazio topologico. Un controesempio. Se il complemento di *a* non contiene aperti, in particolare se l'interiore del complemento è vuoto, il terzo escluso *a vel non a* non è valido in generale, perché per il suo modello topologico vale $(a \cup \sim a) = a$.

(Letta in senso classico, questa formula afferma che la negazione è inclusa nell'affermazione. Ritroviamo così Spinoza, intuizionista alla pari di Cartesio, e il suo detto: *Omnis adfirmatio est negatio.* Lettera L).

Intermezzo freudiano

Qui dovrebbe risultare evidente il carattere freudiano della negazione, che non sempre nega. Freud era intuizionista senza saperlo. Infatti, anche per lui il terzo escluso non era una legge logica. Freud non lo diceva alla Brouwer. Diceva che la negazione non sempre nega. *Ergo non A* talvolta è *A*. Di conseguenza *A vel non A*, talvolta diventa *A vel A*, cioè *A*, che in generale non è una tautologia.

Perché la negazione freudiana non sempre nega? Perché, secondo la metapsicologia freudiana, talvolta la negazione, invece di negare, svolge la funzione di portare alla coscienza ciò che è rimosso. Si può topologizzare l'affermazione di Freud e renderla più scientifica. Basta supporre che il rimosso, pur non appartenendo alla coscienza, gli sia aderente, cioè gli sia vicino quanto si vuole. (Tecnicamente, il rimosso è un punto limite della coscienza). Insomma, il rimosso starebbe alla *frontiera* della coscienza, ma non *dentro* alla coscienza. (Che il rimosso stia alla frontiera della coscienza, la quale non appartiene alla coscienza, implica che esso sia irraggiungibile da dentro alla coscienza). Da qui a ritrovare, passando per Freud, la definizione topologica di negazione il passo è breve: la negazione di a esclude sia gli elementi di a sia gli elementi della frontiera di a. (In questo caso la negazione freudiana o topologica non nega in senso classico). Poiché a e il suo complemento hanno la stessa frontiera, la negazione di a è senza frontiera, quindi è un aperto. Con ciò si ottiene che la negazione di un aperto è ancora un aperto (chiusura dell'algebra degli aperti rispetto alla negazione).

Probabilità intuizionista

Per trasferire questo discorso algebrico-topologico al calcolo delle probabilità, supponiamo per semplicità che l'intervallo di numeri reali [0,1] sia uno spazio topologico con la topologia degli intervalli $[0, x[$. In altri termini, gli aperti (di base) di questa topologia sono gli intervalli "iniziali", che cominciano da 0 e terminano con $x < 1$, valore estremo escluso. Inoltre, la misura del grado di plausibilità di a è posto, ancora per semplicità, pari ad a.

Si vede facilmente che in questo calcolo il grado di plausibilità del terzo escluso ($a \cup \sim a$) è pari ad a, essendo il grado di plausibilità di $\sim a$ in generale pari a zero (se $a \neq 0$). Quindi il grado di plausibilità del terzo escluso è pari a 1 solo quando l'evento coincide con l'intero intervallo [0,1]. Calcolando il valore medio della probabilità del terzo escluso, integrando $2x^2dx$ su [0,1] (2 è un fattore di normalizzazione) si ottiene il valore di 2/3. Il risultato sembra non poco paradossale. "Lo vedo, ma non ci credo", direbbe Cantor. Lanciando per aria una monetina "intuizionista" si ottiene un risultato, o testa o croce, solo due volte su tre. Negli altri casi la monetina continua a roteare all'infinito per aria e… entrambi i giocatori perdono la posta, non potendo aspettare per l'eternità. È un caso di cosiddetta "scommessa olandese". (Perché si dice così?) A rifletterci bene, tuttavia, il risultato non è né paradossale né contraddittorio. Infatti, la logica intuizionista è una logica temporale, precisamente è la logica del tempo di sapere. Ci può volere un tempo infinito per sapere se è uscito testa o croce. In termini quantistici si potrebbe dire che le osservazioni di testa o croce, come le determinazioni della velocità e della posizione di una particella, sono complementari. Se decidi di determinare l'una, perdi le informazioni che potrebbero determinare l'altra (principio di indeterminazione).

Ovviamente, questo calcolo delle probabilità è inadatto per le consuete situazioni di rischio (giochi di azzardo) o di incertezza operativa (misure campionarie o test di significatività), dove è possibile, nonché necessario, decidere e decidere entro un intervallo di tempo limitato. Tuttavia, il calcolo intuizionista sembra plausibile per i fenomeni psichici, che avvengono generalmente in perdita. In effetti, secondo Freud, l'oggetto del desiderio è da ritrovare. Ma se è nascosto in qualche piega dell'infinito è come se per il soggetto finito fosse perso. Come dimostra la crisi delle borse di questi giorni, il caso della perdita imprevedibile ma necessaria non sembra tanto remoto. La teoria intuizionista la spiega senza invocare cause né prossime né remote, né presenti (cause efficienti) né future (cause finali), integrandola come fatto intrinseco alla struttura. In termini intuizionisti, la perdita soggettiva è un fenomeno spontaneo – strutturale – come il moto inerziale, il decadimento radioattivo, la nascita di nuove specie biologiche o la loro decimazione, l'exadattamento secondo Gould, l'elezione di stupidi alle più alte cariche dello Stato.

Postilla bayesiana

Un'ultima considerazione sulla natura non eziologica del calcolo intuizionista delle probabilità. Nel calcolo classico delle probabilità esiste una formula, data dal teorema di

Bayes, per calcolare la probabilità condizionata. Questa formula permette di calcolare la probabilità dell'evento incerto a, dato l'evento certo h, per esempio il Tuo sapere. In simboli,

$$P(a \mid h) = P(a \cap h)/P(h).$$

La formula di Bayes è l'ultimo baluardo in epoca scientifica del fatiscente principio di ragion sufficiente, definitivamente demolito da Hume nel XVIII secolo. Posto che h sia la causa e a l'effetto, la formula permette di calcolare la probabilità dell'effetto a, data la causa h. In questo senso la formula è stata applicata in medicina per la diagnosi automatica della malattia a partire dalla sintomatologia, con risultati non brillanti. La formula risulta indeterminata se la probabilità della causa è nulla. In tal caso, per convenzione, si pone che la probabilità dell'effetto sia un numero qualunque compreso tra 0 e 1.

Il caso della probabilità nulla si verifica anche nell'intuizionismo. Tra i tanti ne scelgo uno interessante per lo psicanalista, il caso epistemico.

La logica intuizionista può essere interpretata come logica epistemica. (Vedi il mio *Una matematica per la psicanalisi*). Come operatori epistemici, del tipo "so che", si usano le tesi classiche non intuizioniste, per esempio il terzo escluso. "So che x" diventa $(x \cup \sim x)$, in breve εx. In questa logica esiste il già citato teorema di Cartesio:

$$\sim\varepsilon x \rightarrow \varepsilon x,$$

il quale afferma che il non sapere implica il sapere. Qual è la probabilità di questo enunciato? Come tutte le tautologie, anche questa ha probabilità 1. Ma, posto il non sapere come dato certo e il sapere come evento incerto, la formula di Bayes dà un risultato indeterminato, perché la probabilità del non sapere è nulla. Il non sapere non può essere intuizionisticamente considerato come la causa del sapere. Infatti, come abbiamo appena visto, il non sapere è intrinseco a ogni sapere. Freudianamente parlando, c'è la coscienza per il solo fatto che c'è l'inconscio, non viceversa. E così, grazie all'intuizionismo, si possono finalmente espungere dalla teoria psicanalitica considerazioni eziologiche sul tipo della freudiana *L'eziologia dell'isteria* (1896). La teoria psicanalitica si può, allora, sviluppare su basi meno mediche e più scientifiche.

E la clinica?

Il riferimento alla clinica è presto detto, quasi automatico.

Se la perdita ha un valore atteso positivo, allora

a) il folle si lascia andare all'ozio (assenza d'opera, secondo Foucault);

b) l'ossessivo scommette contro la perdita;

c) l'isteria sostituisce la scommessa con l'idealizzazione, dove crede di non perdere nulla;

d) il perverso non scommette, rimanendo nell'ambito del finito (feticcio), cioè classico;

e) lo psicanalista lacaniano fa la teoria dell'oggetto originariamente perduto;

f) lo psicanalista freudiano tenta di ritrovare parte di quel che ha perduto.

Problema aperto

In tutto il sito sostengo che la natura del meccanicismo, la cui introduzione è auspicabile anche in psicanalisi, è la simmetria. È meccanica la leva di Archimede perché è in equilibrio quando pesi uguali sono posti agli estremi di bracci uguali (simmetria rispetto al fulcro della leva). È meccanico il fotone quantistico che passa attraverso la fessura di destra con probabilità *a* e attraverso la fessura di sinistra con probabilità 1–*a* (simmetria rispetto al valore di massima incertezza ½). La nozione di simmetria unifica sia la meccanica deterministica sia quella indeterminista. E questo mi sembra un ottimo "guadagno".

Ma il calcolo intuizionista delle probabilità fa decadere l'additività e, di conseguenza, la simmetria tra *a* e 1–*a* rispetto a ½.

Domanda: il calcolo intuizionista delle probabilità non è più meccanicista, non essendo simmetrico, o esiste un'altra forma più complessa di simmetria che mi sfugge?

Osservazione sulla negazione intuizionista

La monetina intuizionista mette in luce un tratto della psicologia infantile.

"Mamma, voglio sempre vincere", diceva la mia nipotina, quando aveva cinque anni, appena imparato a giocare – molto bene – alcuni giochi con le carte.

La negazione intuizionista incarna qualcosa di questa volontà di potenza (per inciso, secondaria alla volontà di sapere, nel caso di saperci fare). Non è proprio come ricorda Freud in *Costruzioni in analisi* (1937): *Heads I win, tails you lose*, ma ci va molto vicino. Per il bambino, prima che per Freud, non esiste la negazione. La negazione di bianco, non è nero, ma tutto il resto: nero, giallo, rosso, … tutti i colori dell'arcobaleno. Insomma, anche la negazione è un'affermazione. Solo che i colori dell'arcobaleno sono molti, praticamente infiniti. La probabilità che si verifichi un ben preciso non-bianco è infinitesima. La negazione di bianco è, allora, un non-colore. In pratica, per il bambino si può solo vincere, perché non esiste il colore che riassume e sintetizza tutti i non-colori. Per dirla con Lacan il non-bianco è un universale *non tutto*, che non si concettualizza. Al gioco di Testa o Croce, esiste solo Testa. Le altre possibilità sono non-eventi, che non riguardano il soggetto. Se esiste solo Testa, il soggetto può solo o vincere o… aspettare di vincere. (Kant ricorda qualcosa di simile quando classifica "non bianco" come giudizio infinito).

L'incompletezza e l'infinitezza sono aperture della logica intuizionista assolutamente da non perdere. Per formalizzare la psicanalisi mi sembra particolarmente appropriato utilizzare logiche, come quella intuizionista, che conservano tratti della logica infantile, per non dire inconscia.

(Aggiornato il 14 giugno 2009)